

益阳市一中 2023 年下学期高二年级第一次月考

数 学 试 卷

考试范围：必修第二册、选择性必修第一册第一、二、三章；

考试时间：120 分钟；命题、审题：高二数学备课组

注意事项：

1. 答题前填写好自己的姓名、班级、考号等信息
2. 请将答案正确填写在答题卡上

第 I 卷（选择题）

一、单选题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 直线 $x - y + 8\sqrt{3} = 0$ 的倾斜角为()

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{3\pi}{4}$ D. $\frac{5\pi}{6}$
2. 已知复数 z 满足： $\frac{z}{1-2i} = i$ (i 为虚数单位)，则 z 的共轭复数为 ()

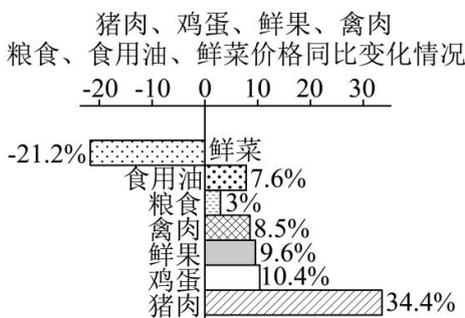
A. $-2-i$ B. $-2+i$ C. $2-i$ D. $2+i$
3. 已知平面向量 $\vec{a} = (\sqrt{3}, -1)$ ， $|\vec{b}| = 4$ ，且 $(\vec{a} - 2\vec{b}) \perp \vec{a}$ ，则 $|\vec{a} - \vec{b}| =$ ()

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5
4. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $ac = 8, a + c = 7, B = \frac{\pi}{3}$ ，则 $b =$ ()

A. 25 B. 5 C. 4 D. $\sqrt{5}$
5. 设 P 是双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ 上一点， F_1, F_2 分别是双曲线左、右两个焦点，若 $|PF_1| = 9$ ，则 $|PF_2|$ 等于 ()

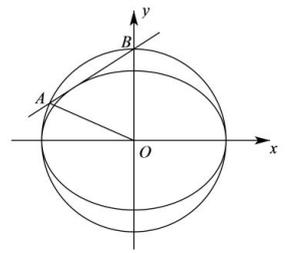
A. 1 B. 17 C. 1 或 17 D. 8
6. 已知圆台的上下底面半径分别为 1 和 2，侧面积为 $3\sqrt{5}\pi$ ，则该圆台的体积为 ()

A. $\frac{8\pi}{3}$ B. $\frac{14\pi}{3}$ C. 5π D. $\frac{16\pi}{3}$
7. 2022 年 11 月，国内猪肉、鸡蛋、鲜果、禽肉、粮食、食用油、鲜菜价格同比（与去年同期相比）的变化情况如图所示，则下列说法正确的是 ()



- A. 猪肉、鸡蛋、鲜果、禽肉、粮食、食用油这 6 种食品中，食用油价格同比涨幅最小
- B. 猪肉价格同比涨幅超过禽肉价格同比涨幅的 5 倍
- C. 去年 11 月鲜菜价格要比今年 11 月低
- D. 这 7 种食品价格同比涨幅的平均值超过 7%

8. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 及圆 $O: x^2 + y^2 = a^2$, 如图, 过点 $B(0, a)$ 与椭圆相切的直线 l 交圆 O 于点 A , 若 $\angle AOB = 60^\circ$, 则椭圆的离心率为 ()



- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{1}{3}$

二、多选题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的四个选项中, 至少有两项是符合题目要求的, 全部选对得 5 分, 部分选对得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知双曲线 $C: \frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{6} = 1$, 则 ()

- A. 双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{3}$ B. 双曲线 C 的虚轴长为 $\sqrt{6}$
 C. 双曲线 C 的焦点坐标为 $(0, \pm 3)$ D. 双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$

10. 已知直线 $l: x + 2my + 1 = 0$, 圆 $E: x^2 + y^2 = 3$, 则下列说法正确的是 ()

- A. 直线 l 必过点 $(1, 0)$ B. 直线 l 与圆 E 必相交
 C. 圆心 E 到直线 l 的距离的最大值为 1 D. 当 $m = \frac{1}{2}$ 时, 直线 l 被圆 E 截得的弦长为 $\sqrt{14}$

11. 一个质地均匀的正四面体 4 个表面上分别有数字 1, 2, 3, 4, 抛掷该正四面体两次, 记事件 M 为“第一次向下的数字为 1 或 2”, 事件 N 为“两次向下的数字之和为奇数”, 则下列说法正确的是 ()

- A. 事件 M 与事件 N 互斥 B. 事件 M 发生的概率为 $\frac{1}{2}$
 C. 事件 M 与事件 N 相互独立 D. 事件 $M + N$ 发生的概率为 1

12. 在四面体 $ABCD$ 中, $AB = CD = 1$, $AC = AD = BC = BD = 2$, E, F, G 分别是棱 BC, AC, AD 上的动点, 且满足 AB, CD 均与面 EFG 平行, 则 ()

- A. 直线 AB 与平面 ACD 所成的角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{15}$
 B. 四面体 $ABCD$ 被平面 EFG 所截得的截面周长为定值 1
 C. $\triangle EFG$ 的面积的最大值为 $\frac{1}{8}$
 D. 四面体 $ABCD$ 的内切球的表面积为 $\frac{7\pi}{30}$

第 II 卷 (非选择题)

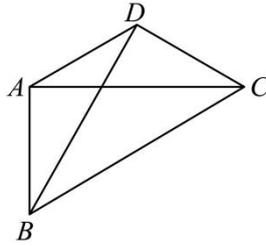
三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , AB 是椭圆过焦点 F_1 的弦, 则 $\triangle ABF_2$ 的周长是_____.

14. 已知圆 $O_1: x^2 + y^2 - 6x = 0$ 和圆 $O_2: x^2 + y^2 + 8y + m = 0$ 外切, 则实数 m 的值为_____.

15. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, P 为 B_1D_1 的中点, 则直线 PB 与 AD_1 所成角的大小为_____.

16. 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB \perp AC$, $AC = \sqrt{3}AB$, $AD = CD = 1$, 则 BD 的最大值为_____.



四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 且椭圆经过点 $(2, -\sqrt{2})$.

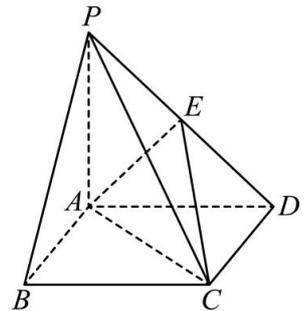
(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过椭圆 C 的左焦点 F_1 作斜率为 1 的直线 l 交椭圆于 A 、 B 两点, F_2 为 C 的右焦点, 求 $\triangle ABF_2$ 的面积.

18. (12 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, E 为线段 PD 上一点, $PB \parallel$ 平面 AEC .

(1) 证明: E 为 PD 的中点;

(2) 若直线 CE 与平面 PAD 所成的角为 45° , 且 $AP = AD = 1$, 求三棱锥 $E-ACD$ 的体积.



19. (12 分) 某单位从一所学校招收某类特殊人才, 对 20 位已经选拔入围的学生进行运动协调能力和逻辑思维能力的测试, 其测试结果如下表:

	运动协调能力 \ 逻辑思维能力	一般	良好	优秀
一般	2	2	1	
良好	4	b	1	
优秀	1	3	a	

例如表中运动协调能力良好且逻辑思维能力一般的学生是 4 人, 由于部分数据丢失, 只知道从这 20 位参加测试的学生中随机抽取一位, 抽到逻辑思维能力优秀的学生的概率为 $\frac{1}{5}$.

(1) 求 a 、 b 的值;

(2) 从运动协调能力为优秀的学生中任意抽取 2 位, 求其中至少有一位逻辑思维能力优秀的学生的概率.

20. (12分) 已知 $f(x) = \sqrt{3} \sin x \cos x + \sin^2 x$. 在 $\triangle ABC$ 中, $f(A) = \frac{3}{2}$.

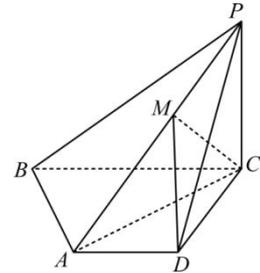
(1) 求角 A 的大小;

(2) D 是边 BC 上的一点, 且 $\sin C = 2\sin B$, AD 平分 $\angle BAC$, 且 $AD = 2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

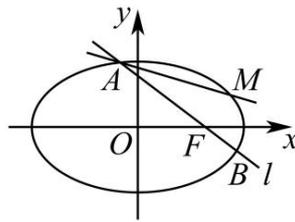
21. (12分) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是等腰梯形, $AD \parallel BC$, $BC = 2AB = 2AD = 2$, $PC = \sqrt{3}$, $PC \perp$ 底面 $ABCD$, M 为棱 AP 上的一点.

(1) 证明: $AB \perp CM$;

(2) 若二面角 $A-DC-M$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{17}}{17}$, 求 $\frac{PM}{PA}$ 的值.



22. (12分) 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(\sqrt{2}, 0)$, P 为圆 $O: x^2 + y^2 = 2$ 与椭圆 C 的一个公共点, $|PF| = 2$.



(I) 求椭圆 C 的标准方程;

(II) 如图, 过 F 作直线 l 与椭圆 C 交于 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 两点, 点 M 为点 B 关于 x 轴的对称点.

试问过 A, M 的直线是否过定点? 若是, 请求出该定点; 若不是, 请说明理由.